Beispiel zur mitwirkenden Breite bei Plattenbalken aus BSH und BSP

Der Plattenbalken des nachfolgend dargestellten Berechnungsbeispiels besteht aus einem BSH-Träger mit den Abmessungen 160 x 480 mm und einer 5-schichtigen BSP-Platte mit konstanter Schichtdicke von 30 mm (h_{BSP} = 150 mm). Der Rippenabstand beträgt 1,45 m. Das statische System ist ein Einfeldträger mit der Länge L = 10 m. Als Material wird GL24h für den BSH-Träger und GL24h* für die BSP-Platte verwendet. Der Plattenbalken wird durch das Eigengewicht $g_{1,k}$, die ständigen Last $g_{2,k}$ = 2,0 kN/m² und eine Nutzlast q_k = 3,0 kN/m² belastet.

Plattenkennwerte

Materialparameter für GL24h*:

${E_0} = 11.600{\text{ N/mm}}^2$
${E_{90}} = 0$
$G = 720{\text{ N/mm}}^2$
${G_r} = 72{\text{ N/mm}}^2$

Dehnsteifigkeit in Längsrichtung:

${c_x} = {E_0} \cdot \sum {{t_x}} = 3 \cdot 0,03 \cdot 11.600 \cdot {10^3} = 1.044.000{\text{ kN/m}}$

Dehnsteifigkeit in Querrichtung:

${c_y} = {E_0} \cdot \sum {{t_y} = } 2 \cdot 0,03 \cdot 11.600 \cdot {10^3} = 696.000{\text{ kN/m}}$

Scheibenschubsteifigkeit:

${c_{xy}} = {{{G_0} \cdot {h_{BSP}}} \over {1 + 6 \cdot 0,32 \cdot {{\left({{t \over a}} \right)}^{ - 0,77}} \cdot {{\left({{t \over a}} \right)}^2}}} = {{720 \cdot {{10}^3} \cdot 0,15} \over {1 + 6 \cdot 0,32 \cdot {{\left({{{0,03} \over {0,15}}} \right)}^{ - 0,77}} \cdot {{\left({{{0,03} \over {0,15}}} \right)}^2}}} = 85.362{\text{ kN/m}}$

Biegesteifigkeit:

${b_x} = {K_{clt}} = \sum {\left({{E_i} \cdot {I_i}} \right) + \sum {\left({{E_i} \cdot {A_i} \cdot {e_i}^2} \right) = } }$
$= 11.600 \cdot {10^6} \cdot \left({3 \cdot {{{{0,03}^3} \cdot 1,0} \over {12}} + 0,03 \cdot 1,0 \cdot {{0,06}^2} + 0,03 \cdot 1,0 \cdot {{(- 0,06)}^2}} \right) = 2,58 \cdot {10^6}{\text{ Nm}}^2{\text{/m}}$

Mitwirkende Breite

Verhältnis der Spannweite L zum Rippenabstand b: ${L \over b} = {{10,0} \over {1,45}} = 6,9$

aus dem Diagramm ergibt sich:

- für die Gleichlast bzw. den Feldbereich: ${{{b_{ef}}} \over b} = 0,73{\text{ }} \to {\text{ }}{{\rm{b}}_{ef,F}} = 0,73 \cdot 1,45 = 1,06{\text{ m}}$
- für die Einzellast bzw. den Auflagerbereich: ${{{b_{ef}}} \over b} = 0,395{\text{ }} \to {\text{ }}{{\rm{b}}_{ef,S}} = 0,395 \cdot 1,45 = 0,573{\text{ m}}$

Querschnittswerte

Feldbereich

Berechnung des Schwerpunkts (mit $E_{0,BSH} = E_{0,BSP} = E_0$ und $E_{90,BSP} = 0$):

${z_S} = {{\sum {{A_i} \cdot {e_i}} } \over {\sum {{A_i}} }} = {{160 \cdot 480 \cdot 240 + 1060 \cdot 90 \cdot \left({480 + 75} \right)} \over {160 \cdot 480 + 1060 \cdot 90}} = 414,5{\text{ mm}}$

$e = {h_{BSH}}/2 + {h_{BSP}}/2 = 480/2 + 150/2 = 315{\text{ mm}}$

${e_{BSH}} = {z_s} - {h_{BSH}}/2 = 414,5 - 480/2 = 174,5{\text{ mm}}$

${e_{BSP}} = {h_{BSH}} + {h_{BSP}}/2 - {z_S} = 480 + 150/2 - 414,5 = 140,5{\text{ mm}}$

Biegesteifigkeit (mit $E_{0,BSH} = E_{0,BSP} = E_0$ und $E_{90,BSP} = 0$):

${E_0}{I_{y,ef}} = \sum {{E_i} \cdot {I_{y,i}} + \sum {{E_i} \cdot {A_i} \cdot {e_i}^2 = } }$
$= {E_0} \cdot \left[{{{160 \cdot {{480}^3}} \over {12}} + 160 \cdot 480 \cdot {{174,5}^2} + {{3 \cdot 1060 \cdot {{30}^3}} \over {12}} + 1060 \cdot 30 \cdot {{\left({150 - {{30} \over 2} + 480 - 414,5} \right)}^2} + } \right.$
$\left. { + 1060 \cdot 30 \cdot {{\left({150 - {{30} \over 2} - 60 + 480 - 414,5} \right)}^2} + 1060 \cdot 30 \cdot {{\left({{{30} \over 2} + 480 - 414,5} \right)}^2}} \right] = $
$= {E_0} \cdot 5,93 \cdot {10^9} = 11.600 \cdot 5,93 \cdot {10^9} = 6,88 \cdot {10^{13}}{\text{ Nmm}}^2 $

effektives Trägheitsmoment:

${I_{y,ef}} = 5,93 \cdot {10^9}{\text{ mm}}^4$

effektive Widerstandsmomente:

${W_{y,ef,o}} = {{{I_{y,ef}}} \over {{e_o}}} = {{5,93 \cdot {{10}^9}} \over { - \left({140,5 + 150/2} \right)}} = {{5,93 \cdot {{10}^9}} \over { - 215,5}} = - 2,75 \cdot {10^7}{\text{ mm}}^3$

${W_{y,ef,u}} = {{{I_{y,ef}}} \over {{e_u}}} = {{5,93 \cdot {{10}^9}} \over {414,5}} = 1,43 \cdot {10^7}{\text{ mm}}^3$

Schubkorrekturfaktor (aus FE-Berechnung bzw. [1]):

$\kappa = 0,337$

Anmerkung: Der Schubkorrekturfaktor wurde mittels einer FE-Berechnung ermittelt, da derzeit keine allgemeingültige Lösung für Plattenbalken aus BSH und BSP vorliegend ist.

Schubsteifigkeit:

${\left({GA} \right)_{ef}} = \kappa \cdot \sum {\left({{G_i} \cdot {A_i}} \right)} =$
$= 0,337 \cdot \left({3 \cdot 720 \cdot 1060 \cdot 30 + 2 \cdot 72 \cdot 1060 \cdot 30 + 720 \cdot 160 \cdot 480} \right) = 4,33 \cdot {10^7}{\text{ N}} = 4,33 \cdot {10^4}{\text{ kN}} $

Auflagerbereich

Berechnung des Schwerpunkts (mit $E_{0,BSH} = E_{0,BSP} = E_0$ und $E_{90,BSP} = 0$):

${z_S} = {{\sum {{A_i} \cdot {e_i}} } \over {\sum {{A_i}} }} = {{160 \cdot 480 \cdot 240 + 573 \cdot 90 \cdot \left({480 + 75} \right)} \over {160 \cdot 480 + 573 \cdot 90}} = 366,5{\text{ mm}}$

$e = {h_{BSH}}/2 + {h_{BSP}}/2 = 480/2 + 150/2 = 315{\text{ mm}}$

${e_{BSH}} = {z_s} - {h_{BSH}}/2 = 366,5 - 480/2 = 126,5{\text{ mm}}$

${e_{BSP}} = {h_{BSH}} + {h_{BSP}}/2 - {z_S} = 480 + 150/2 - 366,5 = 188,5{\text{ mm}}$

Biegesteifigkeit (mit $E_{0,BSH} = E_{0,BSP} = E_0$ und $E_{90,BSP} = 0$):

${E_0}{I_{y,ef}} = \sum {{E_i} \cdot {I_{y,i}} + \sum {{E_i} \cdot {A_i} \cdot {e_i}^2 = } }$
$= {E_0} \cdot \left[{{{160 \cdot {{480}^3}} \over {12}} + 160 \cdot 480 \cdot {{126,5}^2} + {{3 \cdot 573 \cdot {{30}^3}} \over {12}} + 573 \cdot 30 \cdot {{\left({150 - {{30} \over 2} + 480 - 366,5} \right)}^2} + } \right.$
$\left. { + 573 \cdot 30 \cdot {{\left({150 - {{30} \over 2} - 60 + 480 - 366,5} \right)}^2} + 573 \cdot 30 \cdot {{\left({{{30} \over 2} + 480 - 366,5} \right)}^2}} \right] =$
$= {E_0} \cdot 4,66 \cdot {10^9} = 11.600 \cdot 4,66 \cdot {10^9} = 5,41 \cdot {10^{13}}{\text{ Nmm}}^2$

effektives Trägheitsmoment:

${I_{y,ef}} = 4,66 \cdot {10^9}{\rm{ mm}}^4$

Belastung

Das Eigengewicht des Trägers ist $g_{1,k}$ = (1,45 · 0,15 + 0,16 · 0,48) · 5,5 = 1,62 kN/m. Die ständige Last $g_{2,k}$ = 2,0 kN/m² (Aufbau) und die Nutzlast q_k = 3,0 kN/m² wirken über die gesamte Breite b. Es ergibt sich damit als Streckenlast des Trägers $g_{2,k}$ · b = 2,90 kN/m und q_k · b = 4,35 kN/m.

Die Belastung des Trägers beträgt somit q_d = 1,35 · (1,62 + 2,90) + 1,50 · 4,35 = 12,63 kN/m.

Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit (ULS)

Biegung

Maximales Biegemoment in Feldmitte:

${M_{y,\max }} = {{{q_d} \cdot {L^2}} \over 8} = {{12,63 \cdot {{10,0}^2}} \over 8} = 157,84{\text{ kNm}}$

Biegerandspannungen: ${\sigma _{o,\max }} = {{{M_{y,\max }}} \over {{W_{y,ef,o}}}} = {{157,84 \cdot {{10}^6}} \over { - 2,75 \cdot {{10}^7}}} = - 5,74{\text{ N/mm}}^2$ ${\sigma _{u,\max }} = {{{M_{y,\max }}} \over {{W_{y,ef,u}}}} = {{157,84 \cdot {{10}^6}} \over {1,43 \cdot {{10}^7}}} = 11,04{\text{ N/mm}}^2$	

Nachweis:

${\sigma _{\max ,BSH,d}} \le {{{k_{\bmod }} \cdot {f_{m,BSH,k}}} \over {{\gamma _M}}}{\text{ bzw. }}{\sigma _{\max ,BSP,d}} \le {k_l} \cdot {{{k_{\bmod }} \cdot {f_{m,BSP,k}}} \over {{\gamma _M}}}$

Nachweis der Biegenormalspannungen im BSH-Träger:

$11,04{\text{ kN/mm}}^2 \le {{0,8 \cdot 24,0} \over {1,25}} = 15,36{\text{ kN/mm}}^2{\text{ }}\left({\eta = 71,9{\text{ }}\% } \right)$

Nachweis der Biegenormalspannungen in der BSP-Platte (siehe [2][3]):

$5,74{\text{ kN/mm}}^2 \le 1,1 \cdot {{0,8 \cdot 24,0} \over {1,25}} = 16,90{\text{ kN/mm}}^2{\text{ }}\left({\eta = 34,0{\text{ }}\% } \right)$

Schub

Maximale Querkraft am Auflager:

${V_{z,\max }} = {{{q_d} \cdot L} \over 2} = {{12,63 \cdot 10,0} \over 2} = 63,15{\text{ kN}}$

Schubspannungen τ_{xz}:

Statisches Moment in der Höhe des Schwerpunktes:

${S_y}({z_S}) = 160 \cdot 366,5 \cdot {{366,5} \over 2} = 1,07 \cdot {10^7}{\text{ mm}}^3$

Statisches Moment in der Höhe der Fuge BSH-Träger und BSP-Platte:

${S_y}(z = - 113,5) = 160 \cdot 480 \cdot 126,5 = 9,72 \cdot {10^6}{\rm{ mm}}^3$

Statisches Moment in der Höhe der maßgebenden Querlage in der BSP-Platte:

${S_y}(z = - 143,5) = 573 \cdot 60 \cdot (480 + 150 - 366,5 - 30 - 15) = 7,51 \cdot {10^6}{\text{ mm}}^3$

$\tau (z) = {{{V_z} \cdot {S_y}(z)} \over {{I_{y,ef}} \cdot b(z)}}$

Maximale Schubspannung (z = 0):
${\tau _{\max }} = {{63,15 \cdot {{10}^3} \cdot 1,07 \cdot {{10}^7}} \over {4,66 \cdot {{10}^9} \cdot 160}} = 0,91{\text{ N/mm}}^2$

Schubspannung in der Fuge BSH-BSP:
$\tau (z = - 113,5) = {{63,15 \cdot {{10}^3} \cdot 9,72 \cdot {{10}^6}} \over {4,66 \cdot {{10}^9} \cdot 160}} = 0,82{\text{ N/mm}}^2$

Maximale Rollschubspannung (z = -143,5 mm):
${\tau _{r,\max }} = {{63,15 \cdot {{10}^3} \cdot 7,51 \cdot {{10}^6}} \over {4,66 \cdot {{10}^9} \cdot \left({160 + 2 \cdot 30} \right)}} = 0,46{\text{ N/mm}}^2$

Anmerkung: Beim Übergang von der BSH-Rippe zum BSP-Element handelt es sich um ein lokales Lasteinleitungsproblem. Es treten hier in der BSP-Platte lokal höhere Schubspannungen auf als sich nach der Technischen Biegelehre (strichlierter Schubspannungsverlauf) ergeben würden. Es wird daher vorgeschlagen, für die Ermittlung der maximalen Rollschubspannung eine wirksame Breite in der Größe von der BSH-Trägerbreite zuzüglich einer Verteilbreite zufolge der untersten, parallel zur BSH-Achse orientierten Decklage der BSP-Platte heranzuziehen. Der Verteilungswinkel wird dabei mit 45° angenommen. Die vorgeschlagene Berechnungsweise wurde mit Hilfe einer FE-Berechnung verifiziert und führte zu akzeptablen Abweichungen.

Nachweis:

${\tau _{\max ,d}} \le {{{k_{\bmod }} \cdot {f_{v,k}}} \over {{\gamma _M}}}{\text{ bzw. }}{\tau _{r,\max ,d}} \le {{{k_{\bmod }} \cdot {f_{r,k}}} \over {{\gamma _M}}}$

Nachweis der maximalen Schubspannungen im BSH-Träger
(Schubfestigkeit nach dem Entwurf der ÖNORM B 1995-1-1:2013):

$0,91{\text{ kN/mm}}^2 \le {{0,8 \cdot 2,5} \over {1,25}} = 1,60{\text{ kN/mm}}^2{\text{ }}\left({\eta = 56,9{\text{ }}\% } \right)$

Nachweis der Rollschubspannungen in der BSP-Platte:

$0,46{\text{ kN/mm}}^2 \le {{0,8 \cdot 1,25} \over {1,25}} = 0,80{\text{ kN/mm}}^2{\text{ }}\left({\eta = 57,8{\text{ }}\% } \right)$

Scheibenschub

nach [2] (siehe auch [4][3])

Schubkraft zwischen BSH-Träger und BSP-Platte: 0,82 · 160 = 131,2 N/mm = 131,2 kN/m

Schubkraft $n_{xy,d}$ = 131,2 / 2 = 65,6 kN/m

Ideelle Ersatzdicke: ${t^*} = 120{\text{ mm}}$

Ideelle Nominalschubspannung: $\tau _{0,d}^* = {{{n_{xy,d}}} \over {{t^*}}} = {{65,6} \over {120}} = 0,55{\text{ N/mm}}^2$

Mechanismus I (Schub)

$\tau _{v,d}^* = 2 \cdot \tau _{0,d}^* = 2 \cdot 0,55 = 1,10{\text{ N/mm}}^2$

Nachweis:

$\tau _{v,d}^* \le {{{k_{\bmod }} \cdot {f_{v,BSP,k}}} \over {{\gamma _M}}}$

$1,10{\text{ N/mm}}^2 \le {{0,8 \cdot 5,0} \over {1,25}} = 3,20{\text{ N/mm}}^2{\text{ }}\left({\eta = 34,4{\text{ }}\% } \right)$

Mechanismus II (Torsion)

$\tau _{T,\max ,d}^* = 3 \cdot \tau _{0,d}^* \cdot {{t_{i,\max }^*} \over a} = 3 \cdot 0,55 \cdot {{30} \over {150}} = 0,33{\text{ N/mm}}^2$

Nachweis:

$\tau _{T,d}^* \le {{{k_{\bmod }} \cdot {f_{T,BSP,k}}} \over {{\gamma _M}}}$

$0,33{\text{ N/mm}}^2 \le {{0,8 \cdot 2,5} \over {1,25}} = 1,60{\text{ N/mm}}^2{\text{ }}\left({\eta = 20,6{\text{ }}\% } \right)$

Nachweise im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (SLS)

Für die Nachweise im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit wird näherungsweise mit der mitwirkenden Breite für die Gleichlast gerechnet (siehe Art der Nachweisführung - ULS oder SLS; Querschnittswerte aus Kapitel Querschnittswerte - Feldbereich). Da hier kein einschnürender Effekt zufolge Einzellasten (Auflagerkräfte) auftritt, ist diese Breite konstant über die gesamte Trägerlänge.

Durchbiegung

Durchbiegung auf Grund einer „Einheitsgleichlast“

${w_{\text{"}1,0\text{"}}} = {{5 \cdot \text{"}1,0\text{"} \cdot {L^4}} \over {384 \cdot {E_0} \cdot {I_{y,ef}}}} + {{\text{"}1,0\text{"} \cdot {L^2}} \over {8 \cdot {{\left({GA} \right)}_{ef}}}} = {{5 \cdot 1,0 \cdot {{10,0}^4}} \over {384 \cdot 1,16 \cdot {{10}^7} \cdot 5,93 \cdot {{10}^{ - 3}}}} + {{1,0 \cdot {{10,0}^2}} \over {8 \cdot 4,33 \cdot {{10}^4}}} = 0,00189 + 0,00029\text{ m} = 2,18\text{ mm}$

Anmerkung: Die Berücksichtigung des Durchbiegungsanteils auf Grund der Schubnachgiebigkeit der BSP-Platte beträgt rund 15 % und sollte daher mitberücksichtigt werden.

Durchbiegung zufolge der charakteristischen Einwirkungskombination

${w_{\text{"}1,0\text{"}}} \cdot ({g_{2,k}} \cdot b + {q_k} \cdot b) = 2,18 \cdot (2,90 + 4,35) = 15,8\text{ mm} < {L \over {300}} = {{10.000} \over {300}} = 33,3\text{ mm }\left({\eta = 47,5{\text{ }}\% } \right)$

Durchbiegung zufolge der quasi-ständigen Einwirkungskombination

${w_{\text{"}1,0\text{"}}} \cdot ({g_{1,k}} + {g_{2,k}} \cdot b + {\psi _2} \cdot {q_k} \cdot b) \cdot (1 + {k_{def}}) - {w_c} = $
$2,18 \cdot (1,62 + 2,90 + 0,3 \cdot 4,35) \cdot (1 + 0,69) - 0 = 21,5\text{ mm} < {L \over {250}} = {{10.000} \over {250}} = 40,0\text{ mm }\left({\eta = 53,7{\text{ }}\% } \right)$

Anmerkung: Der Verformungsbeiwert k_{def} = 0,69 ergibt sich nach EN 1995-1-1:2009 Abschnitt 2.3.2.2 aus dem geometrischen Mittel der Werte für BSP mit $k_{def,BSP}$ = 0,80 und für BSH mit $k_{def,BSH}$ = 0,60.

Schwingung

zusätzliche Annahmen:

- Deckenklasse II nach Entwurf ÖNORM B 1995-1-1:2013
- Breite des Deckenfeldes: b_D = 15,0 m
- Betonestrich (E = 25.000 N/mm²); Dicke: 65 mm

Eigenfrequenz

Effektive Biegesteifigkeit (inkl. Eigenbiegesteifigkeit des Estrichs) in Längsrichtung bezogen auf eine Rippe des Plattenbalkens:

${(EI)_{l,ef}} = {\left({{E_0}{I_{y,ef}}} \right)_{PB}} + {\left({EI} \right)_{Estrich}} = $
$1,16 \cdot {10^7} \cdot 5,93 \cdot {10^{ - 3}} + 2,50 \cdot {10^7} \cdot {{1,45 \cdot {{0,065}^3}} \over {12}} = 68.846 + 830 = 69.676\text{ kNm}^2$

Verschmierte Biegesteifigkeit in Längsrichtung bezogen auf 1 m:

${(EI)_{l,ef,1m}} = {{{{\left({EI} \right)}_{l,ef}}} \over {1,45}} = {{69.676} \over {1,45}} = 48.052{\text{ kNm}}^2/\text{m} = 4,81 \cdot {10^7}{\text{ Nm}}^2/\text{m}$

Effektive Biegesteifigkeit (inkl. Eigenbiegesteifigkeit des Estrichs) in Querrichtung bezogen auf 1 m:

${(EI)_{b,ef,1m}} = {\left({{E_0}{I_{x,ef}}} \right)_{PB,1m}} + {\left({EI} \right)_{Estrich,1m}} =$
$1,16 \cdot {10^7} \cdot \left({2 \cdot {{1,0 \cdot {{0,03}^3}} \over {12}} + 2 \cdot 1,0 \cdot 0,03 \cdot {{0,03}^2}} \right) + 2,50 \cdot {10^7} \cdot {{1,00 \cdot {{0,065}^3}} \over {12}} = 679 + 572 = 1.251\text{ kNm}^2/\text{m}$

${f_1} = {\pi \over {2 \cdot {L^2}}} \cdot \sqrt {{{{{\left({EI} \right)}_{l,ef}}} \over m}} \cdot \sqrt {1 + {{\left({{L \over {{b_D}}}} \right)}^4} \cdot {{{{\left({EI} \right)}_{b,ef,1m}}} \over {{{\left({EI} \right)}_{l,ef,1m}}}}}$
$= {\pi \over {2 \cdot {{10,0}^2}}} \cdot \sqrt {{{6,9676 \cdot {{10}^7}} \over {(162 + 290)}}} \cdot \sqrt {1 + {{\left({{{10,0} \over {15,0}}} \right)}^4} \cdot {{1,25 \cdot {{10}^6}} \over {4,81 \cdot {{10}^7}}}} = 6,17 \cdot \approx 1,00 = 6,17\text{ Hz}$

${f_1} = 6,17\text{ Hz} > {f_{II,grenz}} = 6,00\text{ Hz}$

Steifigkeitskriterium

${b_F} = {L \over {1,1}} \cdot \root 4 \of {{{{{\left({EI} \right)}_{b,ef,1m}}} \over {{{\left({EI} \right)}_{l,ef,1m}}}}} = {{10,0} \over {1,1}} \cdot \root 4 \of {{{1.251} \over {48.052}}} = 3,65{\text{ m}}$

$w(1kN) = {{F \cdot {L^3}} \over {48 \cdot {{\left({EI} \right)}_{l,ef,1m}} \cdot {b_F}}} + {{F \cdot L} \over {4 \cdot {{\left({GA} \right)}_{ef}} \cdot {b_F}}} = {{1,0 \cdot {{10}^3} \cdot {{10,0}^3}} \over {48 \cdot 4,81 \cdot {{10}^7} \cdot 3,65}} + {{1,0 \cdot {{10}^3} \cdot 10,0}

\over {4 \cdot 4,33 \cdot {{10}^7} \cdot 3,65}} =$
$= 1,34 \cdot {10^{ - 4}}\text{ m} = 0,13\text{ mm} < {w_{grenz,II}} = 0,50\text{ mm}$

Referenzen