

# Transversal-schubnachgiebiger Träger nach Timoshenko

## Allgemeines

Der [Timoshenko-Balkentheorie](#) liegen die folgenden Annahmen zugrunde:

- Der Querschnitt steht im Vergleich zum [Bernoulli-Balken](#) nicht mehr senkrecht auf die verformte Stabachse.
- Der Querschnitt bleibt, gleich wie beim Bernoulli-Balken, eben ([Navier](#)).
- Unter einer Querkraftverformung treten Schubgleitungen und somit Schubverwölbungen auf, welche im Widerspruch zur Annahme des Ebenbleibens stehen. Dies führt zu Diskrepanzen bei der Schubspannungs- bzw. Schubsteifigkeitsermittlung.
- Mit dem Konzept des Schubkorrekturfaktors  $k$  wird der Fehler bei der Schubsteifigkeit für elastisches Verhalten berichtigt.
- Die Schubspannungsermittlung im Querschnitt erfolgt dann, ident zum Bernoulli-Balken, über das lokale Längsgleichgewicht mit den Biegespannungen. Man spricht daher in der Literatur auch von sekundären Schubspannungen.

## Gleichungen der schubnachgiebigen Trägertheorie

### Kinematik des Balkenelements

Das Balkenelement aus Abb. 1 erfährt eine Verschiebung  $w(x)$  in transversaler Richtung (= Durchbiegung) und eine, davon unabhängige, Querschnittsverdrehung  $\beta(x)$ .



Abb. 1: Verschobenes und verdrehtes Balkenelement

Die Verschiebungen  $u$  und  $w$  jedes Stabpunktes werden durch einen Produktansatz beschrieben. Dabei ist der erste Faktor die Stablängsachse  $x$  mit den beiden Funktionen  $w(x)$  und  $\beta(x)$ . Der zweite Faktor beschreibt die Lage im Querschnitt ( $z$ - Koordinate bei der Querschnittsverdrehung bzw. „1“ bei der Durchbiegung). Aus den angenommenen Verschiebungen können die Verzerrungen des Stabes (Biegeverzerrungen, Querkraftschubverzerrung) bestimmt werden.

$$\begin{equation} \text{\label{eq:eqn\_timoshenko\_uxz}} \quad u(x,z) = z \cdot \beta(x) \end{equation}$$

$$\begin{equation} \text{\label{eq:eqn\_timoshenko\_wxz}} \quad w(x,z) = w(x) \end{equation}$$

$$\begin{equation} \text{\label{eq:eqn\_timoshenko\_epsilon\_x}} \quad \{\varepsilon_x\}(x,z) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = z \cdot \beta'(x) \end{equation}$$

$$\begin{equation} \text{\label{eq:eqn\_timoshenko\_gamma\_xz}} \quad \{\gamma_{xz}\}(x,z) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = \beta(x) + w'(x) \end{equation}$$

## Kinetik und Konstitution

Aufgrund der getroffenen Annahmen in  $z$ -Richtung, können durch Integration der Spannungen  $\sigma_x$  und  $\tau_{xz}$ , die Schnittgrößen  $M_y$  und  $Q_z$  am Querschnitt bestimmt werden.

$$\sigma_x = E(z) \cdot \epsilon_x(x, z) = E(z) \cdot z \cdot \beta'(x)$$

$$\tau_{xz} = G(x) \cdot \gamma_{xz}(x, z) = G(x) \cdot \left( \beta(x) + w'(x) \right)$$

$$M_y = \int \limits_A \sigma_x \cdot z \cdot dA = E(z) \cdot \int \limits_A z^2 \cdot dA \cdot \beta'(x) = K_{CLT} \cdot \beta'(x)$$

$$Q_z = \int \limits_A \tau_{xz} \cdot dA = G(z) \cdot \int \limits_A dA \cdot \left( \beta(x) + w'(x) \right)$$

In den Gleichungen für das Biegemoment  $M_y$  und der Querkraft  $Q_z$  sind die BSP-Steifigkeiten – die Biegesteifigkeit  $K_{CLT}$  und die Schubsteifigkeit  $GA$  – zu berücksichtigen. Die Schubspannungen, errechnet aus dem Verschiebungsansatz, erfüllen jedoch nicht das lokale Längsgleichgewicht mit den Biegespannungen. Diese Lösung der Schubspannungsverteilung ist aber auf jeden Fall einzuhalten. Die ermittelte Schubsteifigkeit  $GA$  stimmt daher nicht, sie wird mit dem Schubkorrekturfaktor  $\kappa$  zu  $S_{CLT}$  korrigiert. Somit ändert sich die Gleichung der Querkraft  $Q_z$  zu:

$$Q_z = \int \limits_A \tau_{xz} \cdot dA \equiv S_{CLT} \cdot \left( \beta(x) + w'(x) \right)$$

$$S_{CLT} = \kappa \cdot GA$$

## Gleichgewicht

Mit den ermittelten Schnittgrößen können die Gleichgewichtsbedingungen anschaulich dargestellt werden.



Abb. 2: Schnittgrößen am infinitesimal kleinen Balkenelement

$$\sum V = 0$$

$$M_y' \cdot dx - Q_z \cdot dx = 0 \Rightarrow M_y' - Q_z = 0$$

$$\sum M = 0$$

$$M_y' \cdot dx - Q_z \cdot dx = 0 \Rightarrow M_y' - Q_z = 0$$

## Differentialgleichungen des schubnachgiebigen Balkens

Als Belastung wirkt eine kontinuierliche Vertikallast  $q_z(x)$ .

### Vertikales Gleichgewicht

$$Q_z' = S_{CLT} \cdot (\beta(x) + w'(x)) \rightarrow Q_z = S_{CLT} \cdot (\beta'(x) + w''(x))$$

$$S_{CLT} \cdot (\beta'(x) + w''(x)) = -q_z(x)$$

### Momentengleichgewicht

$$M_y' = K_{CLT} \cdot \beta'(x) \rightarrow M_y = K_{CLT} \cdot \beta''(x)$$

$$K_{CLT} \cdot \beta''(x) - S_{CLT} \cdot (\beta(x) + w'(x)) = 0$$

Es ergibt sich ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen 2. Ordnung.

## Biege- und Schubspannungen



Abb. 3: Spannungen bei BSP unter Querkraftbiegung ( $E_{90} = 0$ )

### Biegespannung

$$\sigma(x, z) = \frac{M_y(x)}{K_{CLT}} \cdot z \cdot E(z)$$

Für BSP-Aufbauten mit gleichem  $E_0$  aller Längslagen ergibt sich somit die maximale Normalspannung am Rand.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{K_{CLT}} \cdot \frac{t_{CLT}}{2} \cdot E_0$$

### Schubspannung

$$\tau(z) = \frac{V_z(x) \cdot \int_{t_{CLT}/2}^z E(z^*) \cdot z^* \cdot b \cdot d z^*}{K_{CLT} \cdot b}$$

## Vorteile dieser Methode

- Erfasst beliebige Systeme und Lasten
- Der schubnachgiebige Stab ist in den meisten Baustatik-Softwarepaketen enthalten. Daher sehr gut für den EDV-Einsatz in der Praxis geeignet

- Über das Kraftgrößenverfahren auch für die Handrechnung geeignet
- Problemlos auf Platten (ebene Flächentragwerke) sowie die 2D-Plattentheorie ( [W Reissner-Mindlin-Plattentheorie](#) ) erweiterbar
- Bei den ermittelten Durchbiegungen handelt es sich zwar nur um Näherungen, welche aber bei üblichen L/H-Verhältnissen für die Praxis als ausreichend genau anzusehen sind.

## Nachteile dieser Methode

- Bei Einzellasten sowie den Innenauflagern von Durchlaufträgern ist im direkten Lasteinleitungsbereich eine Abweichung der ermittelten Biegespannungen gegeben

From:  
<https://www.ihbv.at/wiki/> - **IHBV Wiki**

Permanent link:  
[https://www.ihbv.at/wiki/doku.php?id=clt:design:plate\\_loaded\\_out\\_of\\_plane:calculation\\_methods:timoshenko&rev=1486577333](https://www.ihbv.at/wiki/doku.php?id=clt:design:plate_loaded_out_of_plane:calculation_methods:timoshenko&rev=1486577333) 

Last update: **2019/02/21 10:28**  
Printed on 2025/11/03 09:49